

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación  
Dirección de Proyectos Internacionales y Especiales

## Competencia matemática en PISA

Jornadas bajacalifornianas en materia de Evaluación Educativa 2011  
"Evaluación una oportunidad de mejora"

Rafael Turullols Fabre

24 de octubre del 2011



## Competencia Matemática

---

- Es la capacidad de un individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz a la vez de plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad o de otro tipo. Además, tiene que ver con la capacidad para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y, utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que pueda satisfacer las necesidades de la vida diaria de un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.



## Competencia Matemática

---

- La Competencia Matemática es un continuo, de esta forma, los individuos más competentes están mejor preparados para utilizar matemáticas y herramientas matemáticas para emitir juicios bien fundamentados y decisiones requeridas por ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.



## Contenido

---

- Las cuatro categorías de contenido son:
  - Cantidad,
  - Cambio y relaciones,
  - Espacio y forma, y
  - Probabilidad y datos



## Cantidad

---

- Cuantificación de los atributos de un fenómeno, relaciones, situaciones y entidades en el mundo.
- Implica la comprensión de la variedad de representaciones de dichas cuantificaciones, y juzgar interpretaciones y argumentos basados en esas cantidades.
- Entendimiento de las medidas, conteos, indicadores, tamaño relativo y tendencias numéricas y patrones.
- Sentido numérico, representación múltiple de cantidades, elegancia en los cálculos, estimación mental, estimación y evaluación de factibilidad de los resultados.



## Cambio y Relaciones

---

- Relaciones temporales y permanentes entre fenómenos, donde los cambios ocurren dentro de un sistema de objetos o fenómenos interrelacionados.
- Cambios a lo largo del tiempo y cambios en un fenómeno relacionados con cambios en otro.
- Cambios discretos o continuos.
- Relaciones permanentes, o invariantes.



## Cambio y Relaciones

- Implica una comprensión de los tipos fundamentales de cambio y reconocimiento del momento de ocurrencia para poder utilizar modelos matemáticos adecuados para describir y predecir cambios. Esto significa modelación del cambio y de las relaciones mediante funciones apropiadas, así como creación, interpretación y traducción entre el lenguaje simbólico y gráfico de la representación de las relaciones.



### UNIDAD: PASOS



La foto muestra las huellas del caminar de un hombre. El tamaño de cada paso  $P$  es la distancia entre los talones de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula  $\frac{n}{P} = 140$ , nos da una relación aproximada entre  $n$  y  $P$  donde,

$n$  = número de pasos por minuto y  
 $P$  = el tamaño del paso en metros.

#### PREGUNTA 1: PASOS

M124Q01

Si aplicamos la fórmula a Héctor que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es el tamaño de los pasos de Héctor? Muestra tus operaciones.



# Cambio y Relaciones

## PREGUNTA 1: PASOS

M124Q01

Si aplicamos la fórmula a Héctor que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es el tamaño de los pasos de Héctor? Muestra tus operaciones.

### Clasificación

**Procesos:** Reproducción  
**Contenido o subescala:** Cambio y relaciones  
**Contexto o situación:** Personal  
**Nivel:** 5 (611 puntos)

### Criterios de calificación

2 Puntos: 0.5 m o 50 cm,  $\frac{1}{2}$  (no se requiere unidad).

- $70/p = 140$
- $70 = 140p$
- $p = 0.5$ .
- $70/140$ .

**1 Punto:** Se da una Substitución correcta de los números en la fórmula, pero respuesta incorrecta o sin respuesta.

- $\frac{70}{p} = 140$  [sólo sustituye los números en la fórmula].

- $\frac{70}{p} = 140$

$70 = 140p$

$p = 2$  [sustitución correcta, pero desarrollo incorrecto].

O bien:

Hay manipulación correcta de la fórmula hasta  $P=n/140$ , pero sin desarrollo correcto posterior.

**0 Puntos:** Otras respuestas.

- 70 cm.



# Cambio y Relaciones

## Puntuación 2

Lugar	País	% de Aciertos
1	Hong Kong	62.2%
2	Macao	60.2%
3	Rusia	54.1%
38	Tailandia	17.3%
39	México	14.5%
40	Brasil	13.9%
	OCDE	36.3%
	México	14.5%

Lugar	Entidad	% de Aciertos
1	Chihuahua	27.0%
2	Querétaro	25.0%
3	Nuevo León	23.0%
	<b>Media Nacional</b>	<b>14.5%</b>
29	Sonora	8.0%
30	Veracruz	7.0%
31	Puebla	6.8%

## Puntuación 1

Lugar	País	% de Aciertos
1	Estados Unidos	48.3%
2	Irlanda	34.7%
3	Portugal	32.3%
38	Dinamarca	8.7%
39	Holanda	7.3%
40	Suecia	6.7%
	OCDE	ND <sup>1</sup>
	México	15.6%

Lugar	Entidad	% de Aciertos
1	Yucatán	29.2%
2	Distrito Federal	24.8%
3	Chihuahua	23.9%
	<b>Media Nacional</b>	<b>15.6%</b>
29	Baja California	7.4%
30	Tabasco	5.1%
31	Nayarit	4.8%



## Cambio y Relaciones

### PREGUNTA 2: PASOS

M124Q03

Bernardo sabe que el tamaño de su paso es de 0.80 metros. La fórmula se ajusta al caminado de Bernardo.

Calcula la velocidad a la que camina Bernardo en metros por minuto y kilómetros por hora. Muestra tus operaciones.



## Cambio y Relaciones

### PREGUNTA 2: PASOS

M124Q03

Bernardo sabe que el tamaño de su paso es de 0.80 metros. La fórmula se ajusta al caminado de Bernardo. Calcula la velocidad a la que camina Bernardo en metros por minuto y kilómetros por hora. Muestra tus operaciones.

#### Clasificación

**Procesos:** Conexiones  
**Contenido o subescala:** Cambio y relaciones  
**Contexto o situación:** Personal  
**Nivel:** 6 (723 puntos)

#### Criterios de calificación

**2 Puntos:** Respuestas correctas (no se requieren las unidades) para metros/minuto y km/hora:  
 $n = 140 \times .80 = 112$ .  
Por minuto camina  $112 \times .80$  metros = 89.6 metros.

Su velocidad es de 89.6 metros por minuto.

Así, su velocidad será de 5.38 o 5.4 km/h. Se asignan 2 puntos siempre y cuando se presenten ambas respuestas correctas (89.6 y 5.4), aunque el desarrollo realizado se muestre o no. Nótese que son aceptables los errores debido al redondeo.

Por ejemplo, 90 metros por minuto y 5.3 km/h ( $89 \times 60$ ) son aceptables.

**1 Punto:** La velocidad en metros por minuto es correcta (89.6 metros por minuto) pero la conversión a kilómetros por hora es incorrecta o no aparece. Método correcto (mostrado explícitamente) con errores de cálculo menores.

Sólo se presenta 5.4 km/h, pero no 89.6 metros/minuto (no se muestran cálculos intermedios).  
 $n = 140 \times .80 = 112$ . No se presentan más desarrollos, o bien son incorrectos a partir de este punto.

**0 Puntos:** Otras respuestas.



## Cambio y Relaciones

Puntuación 2			Puntuación 1		
Lugar	País	% de Aciertos	Lugar	País	% de Aciertos
1	Hong Kong	18.7%	1	Macao	53.6%
2	Japón	18.2%	2	Hong Kong	50.4%
3	Bélgica	15.5%	3	Canadá	43.7%
38	México	1.3%	38	Túnez	14.9%
39	Brasil	1.1%	39	México	13.6%
40	Indonesia	0.6%	40	Brasil	12.2%
	OCDE	8.0%		OCDE	28.9%
	México	1.3%		México	13.6%

Lugar	Entidad	% de Aciertos	Lugar	Entidad	% de Aciertos
1	Jalisco	3.9%	1	Chihuahua	36.1%
2	San Luis Potosí	3.4%	2	Coahuila	25.0%
3	Guanajuato	3.3%	3	Yucatán	24.8%
	<b>Media Nacional</b>	1.3%		<b>Media Nacional</b>	13.6%
29	Zacatecas	0.1%	29	Chiapas	4.6%
30	Colima	0.1%	30	Guerrero	3.3%
31	Tabasco	0.0%	31	Tlaxcala	2.7%



## Espacio y Forma

- Este contenido abarca una gran variedad de fenómenos que se encuentran dondequiera en el mundo visual:
  - Patrones
  - Propiedad de los objetos
  - Posición y orientación
  - Representación de objetos
  - Decodificación y codificación de información visual
  - Navegación
  - Interacción dinámica con formas reales así como con su representación.



## Espacio y Forma

- Aunque la Geometría sirve como fundamento para Espacio y Forma, esta categoría va más allá de la Geometría tradicional en cuanto a contenido, significado y método; incluyendo elementos de otras áreas matemáticas como
  - Visualización espacial
  - Medida
  - Números
  - Algebra
- Este contenido incluye actividades como: comprensión de la perspectiva (en pinturas, creación y lectura de mapas), transformación de figuras, interpretar vistas de tres dimensiones en varias perspectivas, y la construcción de representación de objetos.



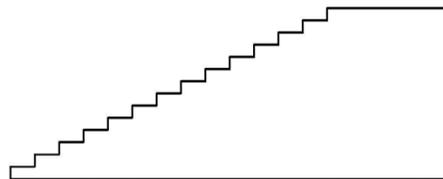
## Espacio y Forma

### LA ESCALERA

#### Pregunta 23: LA ESCALERA

M547Q01

En el diagrama de abajo se ilustra una escalera con 14 escalones que tiene una altura total de 252 cm:



Altura total: 252 cm

Profundidad total: 400 cm

¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 escalones?

Altura: ..... cm.



## Espacio y Forma

De lado derecho encontrarás un dibujo de dos dados.

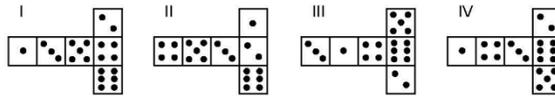
Los dados son cubos especiales con números para los cuales se aplica la siguiente regla:



El número total de puntos en dos caras opuestas siempre es siete.

Tú puedes construir un sencillo cubo con números cortando, doblando y pegando un pedazo de cartón. Esto puede hacerse de distintas maneras. En el diagrama de abajo puedes ver cuatro recortes que pueden usarse para hacer cubos, con puntos en las caras.

¿Cuál o cuáles de las siguientes formas puede(n) doblarse para formar un cubo que cumpla con la regla de que la suma de las caras opuestas sea 7? Para cada forma, pon un círculo alrededor de "Sí" o de "No" en el cuadro que aparece a continuación.



Forma	¿Cumple con la regla de que la suma de las caras opuestas sea 7?
I	Sí / No
II	Sí / No
III	Sí / No
IV	Sí / No



## Probabilidad

- Este contenido incluye reconocer el lugar de la variación en un proceso, tener sentido de la cuantificación y explicación de la variación, reconocimiento de la variación en las mediciones, y conocimiento de probabilidad.
- Elaborar, interpretar y evaluar conclusiones obtenidas en situaciones donde la se tiene un grado de incertidumbre es parte fundamental de este aspecto.



## Probabilidad

---

- Existe incertidumbre en la mayoría de las predicciones: encuestas, pronósticos del tiempo y modelos económicos.
- Existe variación en el proceso de manufactura, calificación de exámenes, resultados de encuestas.
- La probabilidad es fundamental para muchas actividades recreativas de los individuos.



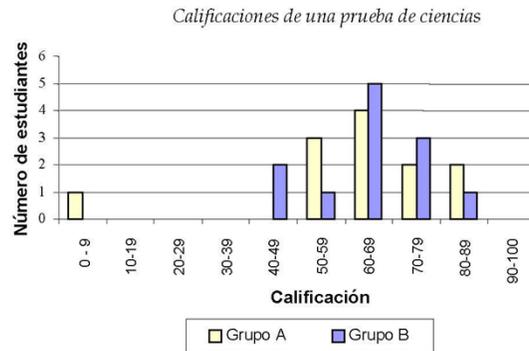
## Probabilidad

---

- Tradicionalmente, las áreas curriculares de Probabilidad y Estadísticas proporcionan elementos formales para la descripción, modelamiento y para la interpretación de fenómenos probabilísticos, así como para la realización de inferencias.
- Adicionalmente, se considera que tener conocimiento de los números y de aspectos de álgebra, tales como la representación simbólica y gráfica, contribuyen al interés de los problemas presentados en este contenido.

En el diagrama de abajo se muestran los resultados de un examen de ciencias para dos grupos, el Grupo A y el Grupo B.

La calificación promedio para el Grupo A es 62.0 y el promedio para el Grupo B es 64.5. Los estudiantes pasan la prueba cuando su calificación es de 50 o más.



Viendo el diagrama, la maestra afirmó que al Grupo B le fue mejor que al Grupo A en esta prueba.

Los estudiantes del Grupo A no estuvieron de acuerdo con su maestra y tratan de convencerla de que no necesariamente le fue mejor al Grupo B.

Empleando la gráfica, da un argumento matemático que podrían emplear los estudiantes del Grupo A.

Pregunta de nivel: 5  
 Proceso: *Conexiones*  
 Contenido: *Probabilidad*  
 Contexto: *Educativo*

**Criterio para crédito total:**  
 El estudiante da un argumento válido, que relaciona el número de estudiantes que aprobó, la influencia desproporcionada de un elemento atípico o el número de estudiantes con calificaciones más bajas.

Lugar	Entidad	% de Aciertos
1	Colima	44.4%
2	Nuevo León	41.6%
3	Jalisco	41.5%
	<b>Media Nacional</b>	23.5%
29	Chiapas	11.7%
30	Baja California Sur	10.1%
31	Tabasco	7.5%

Lugar	País	% de Aciertos
1	Hong Kong	75.5%
2	Macao	69.4%
3	Corea	66.8%
38	Tailandia	16.8%
39	Túnez	15.4%
40	Indonesia	11.4%
	OCDE	46.8%
	México	23.5%

Lugar	Entidad	% de Aciertos
2	Bachillerato general	32.5%
3	Profesional técnico	28.9%
4	Secundaria general	23.5%
5	Secundaria técnica	11.2%
6	Capacitación para el trabajo	8.5%
7	Secundaria para trabajadores	5.3%
8	Telesecundaria	1.9%



## Temas específicos

---

Para abordar estas cuatro categorías se recurre a distintos temas matemáticos establecidos, como los siguientes:

- números y unidades;
- operaciones aritméticas;
- porcentajes y proporciones;
- estimaciones;
- funciones elementales;
- expresiones algebraicas;
- ecuaciones;
- sistemas de coordenadas;
- relaciones en y entre objetos geométricos;
- medidas geométricas;
- obtención y representación de datos;
- variabilidad y descripción de datos;
- muestras y muestreo;
- azar y probabilidad.



## Temas específicos 1

---

- En *números y unidades* se incluyen los conceptos, representaciones y propiedades de los números enteros y racionales, los aspectos relevantes de los números irracionales, así como las cantidades y unidades que hacen referencia a fenómenos e ideas como el tiempo, el dinero, el peso, la temperatura, la distancia, el área y el volumen y las cantidades obtenidas, y su descripción numérica.



## Temas específicos 2

---

- Operaciones aritméticas incluye la naturaleza, propiedades y orden de estas operaciones y las convenciones de notación relacionadas con ellas.
- Porcentajes y proporciones hace referencia a la descripción numérica de las magnitudes relativas.



## Temas específicos 3

---

- Las funciones elementales hacen referencia al concepto de función, incluidas las lineales y otras funciones relevantes, a sus propiedades y a distintas descripciones y representaciones de las mismas (p. ej., verbal, simbólica, esquemática, tabular y gráfica).
- La interpretación verbal y el manejo de expresiones algebraicas que incluyen números, símbolos, operaciones aritméticas y raíces simples forman la base de las expresiones algebraicas.



## Temas específicos 4

---

- En ecuaciones se incluyen las lineales, ecuaciones simples de segundo grado y ecuaciones que se pueden resolver mediante la aplicación consecutiva de operaciones inversas.
- Los sistemas de coordenadas se utilizan para representar y describir datos, así como objetos geométricos y algebraicos relevantes.



## Temas específicos 5

---

- Las relaciones en y entre objetos geométricos en dos y en tres dimensiones hacen referencia a las relaciones estáticas, como las conexiones algebraicas entre elementos de las figuras (por ejemplo el Teorema de Pitágoras define la relación entre las longitudes de un triángulo rectángulo), la posición relativa, la semejanza y congruencia, y a las relaciones dinámicas que implican la transformación y el movimiento de los objetos, así como las correspondencias entre los objetos bidimensionales y tridimensionales.



## Temas específicos 6

---

- Las medidas geométricas se ocupan de las características numéricas de los objetos y de las distancias entre ellos, p. ej., medidas de los ángulos, longitud, perímetro, área y volumen.
- La estimación de cantidades y de expresiones numéricas incluyendo cantidades grandes y redondeo.



## Temas específicos 7

---

- La recolección y representación de datos se centra en la naturaleza, génesis y recolección de diferentes tipos de datos y en las distintas formas de representarlos.
- La variabilidad y descripción de datos aborda nociones como la variabilidad, distribución y tendencia central de grupos de datos, y las formas de describirlos e interpretarlos en términos cuantitativos.



## Temas específicos 8

- Los conceptos de muestra y muestreo de las poblaciones de datos y las inferencias basadas en las propiedades de las muestras son características clave de muestras y muestreo.
- Azar y probabilidad se ocupa de los sucesos aleatorios, las variaciones aleatorias y su representación, el azar y la frecuencia de los sucesos, y los aspectos básicos del concepto de probabilidad.



## Competencia Matemática

